

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Mechanika tekutín pre prax	1
1.2	Čo znamená v mechanike tekutín 'CFD'	4
1.2.1	Teoretická mechanika tekutín	4
1.2.2	Základný koncept CFD	5
1.2.3	Faktory a nástroje implementácie CFD	7
1.2.4	CFD a simulácia skutočnosti	9
1.2.5	Základné typy úloh CFD	11
1.2.6	Poslanie CFD	15
2	Fyzikálne základy	17
2.1	Hustota tekutiny	19
2.2	Prenosové javy	20
2.3	Podobnosť	21
2.3.1	Geometrická podobnosť	22
2.3.2	Kinematická podobnosť	22
2.3.3	Dynamická podobnosť	22
2.4	Princíp napätia v tekutine	26
2.5	Viskozita	27
2.6	Turbulencia	29
2.6.1	Mierky turbulencie	31
2.6.2	Štatistický model turbulencie	36
2.6.3	Zákon steny	40
2.6.4	Intenzita turbulencie	48
2.7	Vedenie tepla	48
2.8	Stlačiteľnosť	51
2.8.1	Zmena hustoty pri prúde plynu	52
2.8.2	Šírenie rozrušov v stlačiteľnom prúde	53
2.8.3	Kvazi jednorozmerné prúdenie	55

2.8.4	Osobitné javy v nadzvukovom prúdení	57
2.9	Kinematika prúdenia tekutiny	60
2.9.1	Prúdové pole	62
2.9.2	Lokálne a konvektívne zmeny	63
2.9.3	Objemový a hmotnostný tok	65
2.9.4	Translačný a rotačný pohyb	66
2.9.5	Deformačný pohyb	67
2.9.6	Tenzor uhlových a deformačných rýchlostí	69
2.9.7	Príklad kinematickej analýzy prúdenia	72
2.9.8	Cirkulácia rýchlosti	74
3	Matematické základy	77
3.1	Matematická klasifikácia prúdenia	77
3.2	Matematická klasifikácia rovníc	79
3.2.1	Hyperbolické rovnice	80
3.2.2	Parabolické rovnice	83
3.2.3	Eliptické rovnice	84
3.3	Modelové rovnice CFD	85
3.3.1	Burgerova rovnica	87
3.3.2	Modelový systém diferenciálnych rovníc CFD	88
3.3.3	Okrajové a počiatočné podmienky	93
3.4	Podmienky riešiteľnosti	100
4	Určujúce rovnice prúdenia	101
4.1	Konzervatívne tvary rovníc	101
4.1.1	Rovnica kontinuity	104
4.1.2	Pohybová rovnica	105
4.1.3	Rovnica energie	106
4.2	Nekonzervatívne tvary rovníc	108
4.2.1	Rovnica kontinuity	108
4.2.2	Pohybová rovnica	109
4.2.3	Rovnica energie	109
4.3	Zdrojové členy CFD rovníc	110
4.3.1	Sily	110
4.3.2	Prívod tepla	119
4.3.3	Práca vonkajších síl	121
4.4	Súhrn k určujúcim rovniciam	123
4.4.1	Diferenciálny tvar	124
4.4.2	Integrálny tvar	124
4.4.3	Tenzorový tvar	125

4.4.4	Základný tvar	125
4.4.5	Všeobecná rovnica transportu skalára	126
4.4.6	Nestacionárne prúdenie	127
4.4.7	Porovnanie rôznych tvarov rovníc	128
4.5	Poznámky k nestlačiteľnému prúdeniu	129
5	Relatívne prúdenie	131
5.1	Kinematika relatívneho prúdenia	131
5.2	Základné tvary	132
5.2.1	Rovnica kontinuity	132
5.2.2	Pohybová rovnica	133
5.2.3	Rovnica energie	134
5.3	Konzervatívne tvary rovníc	135
5.3.1	Rovnica kontinuity	135
5.3.2	Pohybová rovnica	136
5.3.3	Rovnica energie	136
5.4	Zdrojové členy	137
5.4.1	Sily	137
5.4.2	Privedené teplo	139
5.4.3	Práca	141
6	Modely turbulencie	145
6.1	Priama numerická simulácia	147
6.2	Simulácia veľkých vírov	152
6.3	Spriemerované rovnice prúdenia	153
6.3.1	Nestlačiteľné prúdenie	155
6.3.2	Stlačiteľné prúdenie	160
6.3.3	Doplňujúce rovnice	164
6.4	Model $k - \varepsilon$	168
6.4.1	Variácie modelu	169
6.5	Model $k - \omega$	172
6.6	Model Spalart–Allmaras	173
6.7	Model zmiešavacej dráhy	175
6.8	Model Reynoldsových napätí	178
7	Formulácia rovníc pre CFD	181
7.1	Základy pre formuláciu rovníc pre programovanie	181
7.2	Pravouhlý súradnicový systém	183
7.2.1	Rovnica kontinuity	184
7.2.2	Pohybová rovnica	184

7.2.3	Rovnica energie	185
7.2.4	Zápis rovníc CFD v diferenciálnom tvare	185
7.2.5	Zápis rovníc CFD v tenzorovom tvare	187
7.2.6	Zápis rovníc CFD v integrálnom tvare	188
7.2.7	Doplňujúce rovnice k CFD rovniciam	188
7.2.8	Zjednodušenia CFD rovníc	190
7.3	Cylindrický súradnicový systém	194
7.3.1	Rovnica kontinuity	194
7.3.2	Pohybová rovnica	194
7.3.3	Rovnica energie	196
7.3.4	Zápis rovníc CFD v diferenciálnom tvare	196
7.3.5	Zápis rovníc CFD v integrálnom tvare	198
7.3.6	Doplňujúce rovnice	199
7.3.7	Zjednodušenia CFD rovníc	200
8	Diskretizácia oblasti prúdenia	207
8.1	Krivočiary súradnicový systém	211
8.1.1	Vyjadrenie operátorov	213
8.1.2	Vyjadrenie derivácií	214
8.2	Generovanie siete algebraickými rovnicami	216
8.2.1	Sieť typu H	217
8.2.2	Sieť typu C a O	220
8.2.3	Kvaziortogonálna sieť	222
8.2.4	Miestne zahustenia siete	224
8.3	Generovanie diferenciálnymi rovnicami	231
8.3.1	Poissonova rovnica	231
8.3.2	Numerické riešenie	233
8.3.3	Príklady aplikácie H siete	235
8.3.4	Príklad aplikácie C siete	238
8.3.5	Optimalizácia siete	242
8.4	Neštruktúrovaná notifikácia	246
8.5	Generovanie neštruktúrovanej siete	249
8.5.1	Generovanie uzlových bodov siete	249
8.5.2	Triangulácia oblasti	251
8.6	Výpočet objemu a vektorov plochy	254
8.6.1	Fyzikálny priestor	254
8.6.2	Transformovaný priestor	258
9	Metódy riešenia CFD rovníc	267
9.1	Riešenie úloh CFD na počítači	268

9.2	Koncepty diskretizácie rovníc prúdenia	269
9.2.1	Riešenie v kartézskom súradnicovom systéme	269
9.2.2	Riešenie v transformovanom priestore	270
9.2.3	Riešenie v krivočiaram súradnicovom systéme	275
9.3	Metódy diskretizácie rovníc prúdenia	275
9.4	Metóda konečných diferencií	276
9.4.1	Príklad schémy explicitného riešenia	276
9.4.2	Príklad schémy implicitného riešenia	280
9.4.3	Eulerove schémy	283
9.4.4	Upwind schéma	284
9.4.5	Lax-Friedrichsova schéma	285
9.4.6	Lax-Wendroffova schéma	288
9.4.7	MacCormackova schéma	289
9.4.8	Schéma Runge–Kutta	292
9.5	Metóda konečných objemov	294
9.5.1	Explicitná schéma riešenia	295
9.5.2	Implicitná schéma riešenia	296
9.5.3	Schéma Runge–Kutta	297
9.5.4	Diskretizácia integrálov	298
9.5.5	Centrálna schéma	301
9.5.6	Schéma MacCormack	302
9.6	Metóda konečných prvkov	303
9.6.1	Princíp metódy konečných prvkov	303
9.6.2	Lokálna aproximácia	305
9.6.3	Zostavenie systému	308
9.7	Ekvivalencia diskretizácie	312
9.8	Stabilita	313
9.9	Konvergencia	318
9.9.1	Iteratívna konvergencia	318
9.9.2	Časová konvergencia	319
9.9.3	Konzistencia riešenia	322
9.9.4	Priestorová (siet'ová) konvergencia	322
9.10	Neistota výsledku a chyby	329
9.11	Fyzikálne a numerické okrajové podmienky	330
9.12	Poznámky k nestlačiteľnému prúdeniu	335
9.13	Systémový prístup k úlohám	338
9.13.1	Validácia	339
9.13.2	Verifikácia	340
9.13.3	Dokumentácia výsledkov	340

10	Vizualizácia dát	343
10.1	Graf	344
10.2	Izočiary	344
10.3	Vektory rýchlosti	348
10.4	Prúdové čiary	348
10.5	Zobrazenie siete	350
11	Aplikácie pre Q1D prúdenie	353
11.1	Konvergentno divergentný kanál	354
11.1.1	Zadanie pre topológiu úlohy	354
11.1.2	Zadanie pre termodynamiku úlohy	355
11.2	Fyzikálny model	356
11.2.1	1D model CFD	356
11.2.2	Q1D model CFD	357
11.3	Explicitná diskretizácia	361
11.3.1	Metóda konečných diferencií	361
11.3.2	Metóda konečných objemov	363
11.3.3	Schéma MacCormack	364
11.3.4	Doplňujúce rovnice	366
11.3.5	Implementácia MacCormack schémy do kódu	373
11.3.6	Iné schémy	374
11.4	Implicitná diskretizácia	377
11.4.1	Schéma Crank-Nicolson	377
11.4.2	Doplňujúce rovnice	382
11.4.3	Implementácia schémy Crank-Nicolson do kódu	388
11.5	Aplikácia 1: Izentropické prúdenie	389
11.5.1	Explicitná diskretizácia	391
11.5.2	Vplyv voliteľných parametrov	394
11.5.3	Implicitná diskretizácia	397
11.5.4	Porovnanie metód a schém výpočtu	398
11.6	Aplikácia 2: Zachytenie rázovej vlny	401
11.6.1	Nová okrajová podmienka	403
11.6.2	Počiatkové podmienky	404
11.6.3	Porovnanie výpočtov podľa rôznych schém	404
11.7	Aplikácia 3: Podzvukové prúdenie	410
12	Aplikácie pre 2D prúdenie	413
12.1	Konvergentno-divergentný kanál	413
12.1.1	Zadanie pre 2D topológiu úlohy	413
12.1.2	Zadanie pre termodynamiku úlohy	414

12.2	Fyzikálny model	414
12.2.1	2D model CFD	415
12.3	Explicitná diskretizácia	416
12.3.1	Metóda konečných objemov	416
12.3.2	Schéma MacCormack	418
12.3.3	Doplňujúce rovnice	420
12.3.4	Implementácia schémy MacCormack	422
12.4	Aplikácia 4: Izentropické prúdenie	423
12.5	Aplikácia 5: Symetrické prúdenie	424
12.6	Aplikácia 6: Zachytenie rázovej vlny	426
12.7	Aplikácia 7: Nestlačiteľné prúdenie	428
12.8	Viskózne prúdenie (FVM)	432
12.8.1	CFD model	432
12.8.2	Explicitná diskretizácia	433
12.9	Aplikácia 8: Viskózne prúdenie	436
12.10	Viskózne prúdenie (FDM)	438
12.10.1	CFD model	438
12.11	Viskózne nestlačiteľné prúdenie	441
12.11.1	CFD model	441
12.11.2	Semi-implicitná diskretizácia	442
12.12	Aplikácia 9: Nestlačiteľné viskózne prúdenie	445
12.13	Turbulentné prúdenie	446
12.13.1	CFD model prúdovej viskozity	446
12.13.2	Schéma MacCormack	448
12.14	Aplikácia 10: Turbulentné prúdenie	451
12.15	Periodické prúdenie	455
12.16	Aplikácia 11: Periodické prúdenie	457
13	Aplikácie pre 3D prúdenie	459
13.1	Transonický ventilátor	459
13.2	Zadanie pre topológiu úlohy	460
13.3	Zadanie pre termodynamiku úlohy	462
13.4	Fyzikálny model	462
13.5	CFD model	463
13.5.1	Relatívne prúdenie	464
13.5.2	Absolútne prúdenie	465
13.6	Explicitná diskretizácia	466
13.6.1	Relatívne prúdenie	467
13.6.2	Absolútne prúdenie	468
13.6.3	Priestorová diskretizácia	469

13.6.4	Výpočet plôch a objemov	471
13.6.5	Počiatkové podmienky	475
13.6.6	Okrajové podmienky	475
13.6.7	Výpočet časového kroku	480
13.7	Schéma FTCS v detaile	481
13.7.1	Numerická viskozita	482
13.7.2	Korigovaná numerická viskozita	483
13.8	Schéma MacCormack v detaile	484
13.8.1	Umelá viskozita	485
13.9	Schéma Runge – Kutta v detaile	486
13.9.1	Umelá viskozita JST	487
13.10	Súhrn kódovania schém výpočtu	491
13.11	Aplikácia 12: Transonický ventilátor DV2	493
13.12	Aplikácia 13: NASA Rotor 37	497
13.13	Možnosti zdokonalenia CFD modelu	506
Dodatky		511
A	Lagrangeove a Eulerove súradnice	511
B	Odvodenie rovnice kontinuity	513
C	Niektoré tvary pohybovej rovnice	517
C.1	Euler-Gromekova rovnica	517
C.2	Tvary pohybovej rovnice v relatívnom systéme	518
C.3	Zložkový tvar v pravouhlom systéme	519
C.4	Zložkový tvar v cylindrickom systéme	519
C.5	Pohybová rovnica medznej vrstvy	521
D	Zjednodušená rovnica energie	525
D.1	Absolutné prúdenie	525
D.2	Relatívne prúdenie	527
E	Modifikácie Eulerových rovníc CFD	531
F	Konvergentno-divergentný kanál	535
F.1	Nadzvuková dýza	537
F.2	Dýza s rázovou vlnou	539
F.3	Podzvukové prúdenie	541

G	Dôležité vzorce	543
G.1	Súradnicový systém	543
G.2	Vektory	543
G.3	Vektorové operátory	545
G.4	Integrály	548
G.5	Tenzory	549
G.6	Rozvoje	549
H	Numerické derivácie	551
H.1	Diferencie	551
H.2	Derivácie	552
I	Riešenie tridiagonálneho systému rovníc	555
I.1	Thomasov algoritmus	555
I.2	Tridiagonálny maticový systém	557
J	Termodynamické tabuľky	563
K	Niektoré pojmy z oblasti CFD	567
L	Vybraté príklady programov	571
L.1	Alternatívy programovania	571
L.2	Kvázi jednorozmerné prúdenie	573
L.2.1	Explicitná schéma	573
L.2.2	Implicitná schéma	575
L.3	Dvojrozmerné viskózne prúdenie	578
L.4	Schéma SIMPLE	580
L.5	Izoparametrické prvky	584